27/2/2018.

Εισαγωγή Τοπολογία

2η Διάλεξη.

Από προηγούμενο μάθημα

X: $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to \rho(x,y)$

i) $\rho(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ και $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

ii) $\rho(y,x) = \rho(x,y)$ συμμετρική

iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$. τριγωνική ανισότητα

ρ: μετρική

και (X,ρ): μετρικός χώρος

X διαν. χώρος

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα (ή στάθμη)

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$

μετρική που επάγει η νόρμα $\rho = \rho_{\|\cdot\|} : X \times X \to \mathbb{R}$

$\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Παραδείγματα: $\mathbb{R}^k \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i| , i=1,\dots,k\}$

$\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$

Αν $1 \leq p < \infty$

$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Για κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_p \leq k^{1/p} \|\bar{x}\|_\infty$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k$

Για κάθε $i = 1, \ldots, k$

$|x_i| \quad (|x_i|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p} = \|\bar{x}\|_p$

Άρα $\max\{|x_i| \quad i = 1, \ldots, k\} \leq \|\bar{x}\|_p$ δηλ $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_p$.

(Έστω $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \quad i = 1, \ldots, k\}$)

$|x_i| \leq \|\bar{x}\|_\infty \quad i = 1, \ldots, k \Rightarrow |x_i|^p \leq \|\bar{x}\|_\infty^p \quad i = 1, \ldots, k$ και προσθέτουμε κατά μέλη έχουμε $\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \leq k \cdot \|\bar{x}\|_\infty^p \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq k^{1/p} \|\bar{x}\|_\infty$

δηλ $\|\bar{x}\|_p \leq k^{1/p} \|\bar{x}\|_\infty$

1.26 Οι μετρικές που επάγουν οι νόρμες $\| \; \|_\infty$ και $\| \; \|_p$ $1 \leq p < \infty$ στον $\mathbb{R}^k$ και οι ανισότητες που τις συνδέουν.

Για $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^k$ $\quad \rho_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty$

για $1 \leq p < \infty$ $\quad \rho_p(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p$

Από τις ανισότητες 1.25 προκύπτει ότι $\rho_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho_p(\bar{x}, \bar{y}) \leq k^{1/p} \rho_\infty(\bar{x}, \bar{y})$ $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^k$

1.27 **Ορισμός** (Διάμετρος συνόλου)

Έστω (X, ρ) μ.χ και A μη κενό υποσύνολο του X

Ορίζουμε τη διάμετρο του A (συμβολισμός: διαμ(A) ή $\text{diam}(A)$) να είναι $\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) \quad x, y \in A\}$

(όπου το Supremum υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ που δεν είναι άνω φραγμένο είναι το $+\infty$)

1 28 Παραδείγματα

i) Έστω $(\mathbb{R}, \rho)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη μετρική.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$

$\operatorname{diam}([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$

$\operatorname{diam}([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$

$\operatorname{diam}((\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$

$\operatorname{diam}((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$

$\operatorname{diam}((\alpha,+\infty)) = +\infty$

$\operatorname{diam}((-\infty,\alpha)) = +\infty$

$\operatorname{diam}(\{1,3,4,8\}) = 7$

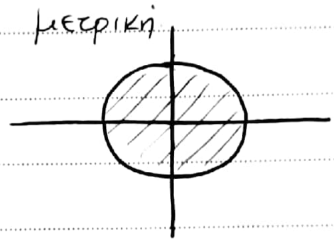
$\operatorname{diam}([1,4] \cup [5,9]) = 8$

$\operatorname{diam}(\mathbb{R}) = +\infty$

ii) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ όπου ρ_2 η ευκλείδεια μετρική

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 \le 1 \}$

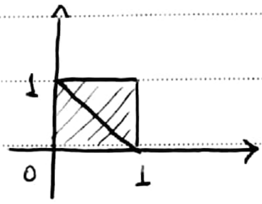
$\operatorname{diam}(A) = 2.$



$B = [0,1] \times [0,1]$

$\operatorname{diam}(B) = \sqrt{2}$

↳ το ίδιο αν έπαιρνα $B = (0,1) \times (0,1)$



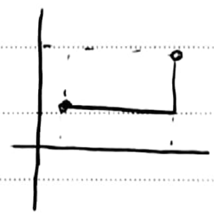
iii) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$

$\{$όπου $\rho_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \}$

Για το $B = [0,1] \times [0,1]$

$\operatorname{diam}(B) = 2$

$(1-0+1-0=2)$



iv) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$

(Υπενθύμιση) $\rho_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{ |x_1-y_1|, |x_2-y_2| \}$

Για το $B = [0,1] \times [0,1]$

$\operatorname{diam} B = 1$

→ Γενικά:

v) Αν (X,ρ) μ.χ και A μονοσύνολο $\operatorname{diam}(A) = 0$

vi) Αν (X,ρ) ο διακριτός μετρικός χώρος (μ.χ) και $\emptyset \neq A \subseteq X$

$diam(A) = 1$ αν το A έχει τουλ δύο στοιχεία.

$diam(A) = 0$ αν το A έχει μόνο ένα στοιχείο (A μονοσύνολο)

Συνέχεια →

27/02/18

Άσκηση: Έστω (X, ρ) μ.χ. Ορίζουμε $d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ $\forall x, y \in X$

Ν.δ.ο. η d είναι μετρική.

Απόδειξη: α) $d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\} \geq 0$

και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

β) $d(y,x) = \min\{1, \rho(y,x)\} = \min\{1, \rho(x,y)\} = d(x,y)$ $\forall x, y \in X$

γ) Τριγωνική ανισότητα. Έστω $x, y, z \in X$

Θ.δ.ο. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) Αν $1 \leq \rho(x,y)$ ή $1 \leq \rho(y,z)$

αν $1 \leq \rho(x,y)$ τότε $d(x,y) = 1$

$d(x,z) \leq 1 = d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ομοίως αν $1 \leq \rho(y,z)$ τότε $d(y,z) = 1$

άρα $d(x,z) \leq 1 = d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

ii) Αν $\rho(x,y) < 1$ και $\rho(y,z) < 1$

$d(x,z) \leq \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) = d(x,y) + d(y,z)$

1.29 Ορισμός: Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται φραγμένο αν $\text{διαμ}(A) < +\infty$

$\left(\Rightarrow \exists C > 0 \text{ ώστε } \rho(x,y) \leq C \quad \forall x, y \in A \right)$

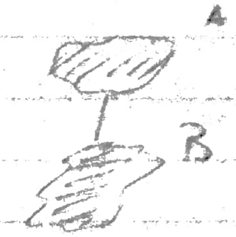
Scanned by CamScanner

Έστω (X,ρ) μ.χ. A μη κενό υποσύνολο του X, $x \in X$

→ Ορίζουμε την απόσταση του x από το A

$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y),\ y \in A\}$$

→ Αν A, B δύο μη κενά υποσύνολα του X ορίζουμε την απόσταση των A, B να είναι $\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y),\ x \in A,\ y \in B\}$

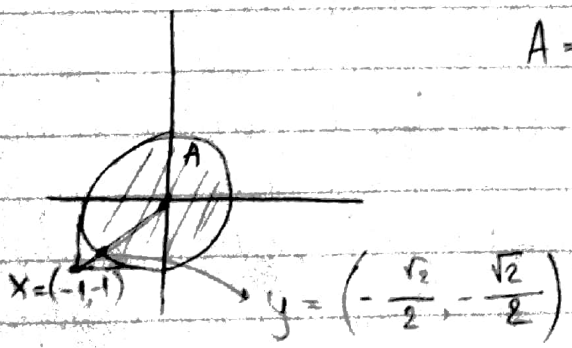


Παρατήρηση: $\rho(x,A) = \rho(\{x\}, A)$

<u>1.31</u> Παρατήρηση: Αν (X,ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ και $x \in A$ τότε
$$\rho(x,A) = 0$$

Ενδέχεται όμως $\rho(x,A) = 0$ χωρίς να ισχύει $x \in A$

<u>Π.χ.</u> $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $A = (0,1)$ $x = 0$
τότε $0 \notin A$ ενώ $\rho(0,A) = 0$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Αν θεωρήσουμε τον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$

$\rho_2(x, A) = \sqrt{2} - 1$

1.3.2 Παρατήρηση: Αν (X, ρ) μ.χ. $\emptyset \neq A \subseteq X$. Τότε για κάθε $a, b \in X$

$$|\rho(a, A) - \rho(b, A)| \leq \rho(a, b)$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in A$ $\quad \rho(a, A) \leq \rho(a, x) \leq \rho(a, b) + \rho(b, x)$

$$\Rightarrow \rho(a, A) - \rho(a, b) \leq \rho(b, x)$$

infimum

Άρα αντιστρέφουμε $\rho(a, A) - \rho(a, b) \leq \inf\{\rho(b, x), x \in A\} = \rho(b, A)$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(a, A) - \rho(b, A) \leq \rho(a, b)}$$

Εναλλάσσοντας τα a, b $\quad \rho(b, A) - \rho(a, A) \leq \rho(b, a) = \rho(a, b)$

Άρα $|\rho(a, A) - \rho(b, A)| \leq \rho(a, b)$

Ακολουθίες

Αν X είναι μη κενό σύνολο.
Ακολουθία στο X καλείται κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$

Αν συμβολίζουμε $f(n) = x_n$ $\qquad (x_n)$
μπορούμε να ονομάσουμε την ακολουθία (x_n) ή $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Τα x_n καλούνται όροι της ακολουθίας

x_1 είναι ο πρώτος όρος
x_2 δεύτερος
x_3 τρίτος
$\vdots$
x_n n-οστός

Οι όροι μιας ακολουθίας δεν είναι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους.
π.χ. αν $a \in X$ και $x_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε μια σταθερή ακολουθία

Υποακολουθίες:

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X και
$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ είναι φυσικοί αριθμοί
τότε η ακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ δηλ. η ακολουθία με όρους
$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$ λέγεται υποακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

Οι δείκτες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελούν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "k"] \arrow[dr] & \mathbb{N} \arrow[d, "x"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(η υποακολουθία είναι η σύνθεση των δύο απεικονίσεων)

π.χ. η $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η υποακολουθία των άρτιων όρων της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$x_2, x_4, x_6, \dots$

$(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η υποακολουθία των περιττών όρων της x_n δηλ.
$x_1, x_3, x_5, \dots$